Funció $y = 4x^2 + 5x - 3$

Derivada $y' = \underline{8x + 5}$

Integral $4x^2 + 5x + c$

NOCIONS DE CÀLCUL DIFERENCIAL I INTEGRAL PER A POLPS EN UN DESERT. 2.0

Ramon Ferrer i Marí.

VERSIÓ EN CATALÀ

TRADUÏT DEL CASTELLÀ AMB L'EINA: HTTPS://WWW.SOFTCATALA.ORG/TRADUCTOR/

ÍNDICE

MATEMÀTIQUES PER A POLPS EN UN DESERT.

Camí: acció de caminar o anar a un lloc o propòsit determinat.
Ruta: camí determinat que va d'un lloc a un altre. Camí o direcció que es pren per a aconseguir un propòsit.

> "Existeix un sol camí, però amb milers de rutes alternatives. Moltes vegades no errem el camí, solament no triem la ruta adequada a les nostres necessitats particulars, d'aquest moment de la nostra vida".
>
> Reflexions d'un Treballador Social.

Per a quí és aquest texte?

Aquest modest treball va enfocat a totes aquelles persones que, en una classe de matemàtiques se senten com un polp en un desert, és a dir, completament fora de lloc i amb una horrible sensació d'estar en perill, clar i imminent, de *morir* intel·lectualment parlant.

És una sensació de terrible impotència que el professor/a estigui en la pissarra explicant això:

Es diu que una funció $f\colon I \to \mathbb{R}$ és **derivable en un punt** $a \in I$, sí existeix el límit:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Explícitament, f és derivable en a si hi ha un número $L \in \mathbb{R}$ verificant que per a cada número $\epsilon > 0$ existeix algún número $\delta > 0$ tal que per a tot $x \in I$ amb $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$ es té que:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leq \epsilon$$

Aquest número L s'anomena **derivada de** f **en** a y el representarem per $f'(a)$ (notació deguda a Lagrange)

I que a tu et soni a això:



Crec que no calen més explicacions.

Però la sensació d'impotència és devastadora, terrible: Aquesta persona, especialment si parlem de menors d'edat, es pot sentir el ser més ximple del planeta sencer, i més veient com la resta de la classe sembla entendre el que el professor/a està explicant.

Això té un nom i es diu indefensió apresa. Visioneu aquest vídeo. No té desaprofitament: https://youtu.be/OtB6RTJVqPM

En aquests temps és molt senzill posar a parir al docent i tirar-li la culpa de la situació: "*És que no sap expressar-se, és que no se sap explicar…*".

Hem de posar-nos en la pell del docent i entendre que té un temps limitat per a exposar un temari que ha de complir. No es pot parar a fer una explicació a la mesura de les necessitats de cada alumne/a.

Una escola no és una modistería, en la qual s'elaboren vestits a la mesura i gust de cada clienta. Una escola és una *Boutique* on, com a molt, tal com passa a l'escola del meu benvolgut cosí Jesús, es tenen models (assignatures) en format *prêt à porter*. I això en el millor dels casos.

Prêt-à-porter és una expressió francesa que significa textualment Llest per a portar. És a dir, tenim un mateix model de vestit, disponible en diverses talles diferents, amb l'esperança que alguna d'elles li anirà bé a la seva compradora.

En moltes altres escoles, les assignatures es donen com es lliurava la roba en l'exèrcit espanyol als reclutes, quan existia el servei militar obligatori: A cadascun se li donava un lot de roba igual (uniforme) però després, l'aspirant a soldat es trobava que els pantalons podien venir-li estrets, l'abric parka, massa deixo anar etc. I a l'escola no es té el recurs de canviar-te, amb un company, les peces que no et van.
Repeteixo, això no és una crítica brutal i asalvatjada contra els docents. Em consten els esforços i fins als sobreesforços que fan cada dia amb les criatures. I tenen tot el meu afecte i solidaritat.

Però alguna cosa haurem de fer amb els que es queden enrere, amb aquests alumnes que, devastats per la indefensió apresa, se senten com a polps en un desert.

Preliminars.

Internet s'ha convertit en una important eina d'aprenentatge. El que veureu en aquest treball són les anotacions que he pres i adaptat d'un canal de Youtube que es titula “El Profe”. Us deixo l'enllaç als seus vídeos.

https://www.youtube.com/watch?v=ZmbXtZDgr4I&list=PL9ZD--BfNPnYYkgWncCOiPP0ii2chQBvX

No pretenc dir que el seu autor, en Braulio Mendoza, un intel·ligentíssim i prestigiós professional mexicà, sigui el millor professor de YouTube que existeix. Hi ha altres professors YouTubers que tenen el seu estil particular i tots són molt dignes.

Però la prova irrefutable, allò que ens demostra que hem trobat el mestre que ens explica les coses de manera comprensible, és precisament això, que aprenguem una matèria, en aquest cas, matemàtiques d'ensenyament secundari, que abans ens resultava àrida i incomprensible.

A mi, en Braulio Mendoza, em serveix. I alguns altres professors com **Matemàtiques Profe Alex**, així com **Ing E Darwin**. De fet, algunes explicacions i desenvolupaments, els he pres d'ells

Si a tu no et serveix, no passa res. Explora la resta de vídeos de matemàtiques de YouTube, fins que trobis aquell professor o professora que et resulti comprensible.

Em vaig acostar a YouTube amb l'esperança que ara, que soc en la meva cinquantena, quan ja tinc la vida professional estabilitzada, pogués llevar-me aquesta ferideta que tinc en el cor. Superar les matemàtiques de 2n curs de BUP, va ser un exercici ardu que em va prendre tres cursos acadèmics. I encara que les vaig superar i vaig poder anar a la Universitat, haig de reconèixer que les exigències professionals d'anys posteriors, m'han portat a oblidar-les.

Per això aprofito aquestes línies per a reivindicar-me, guarir-me aquella ferideta i, si en el procés puc ajudar a algú, millor que millor.

A l’Estat Espanyol, actualment, Derivades i Integrals s'imparteixen en el 2n curs del Batxillerat.

Primer de tot, em donaré el permís de donar una definició personal sobre per a què serveixen les Matemàtiques: Són una Eina, semblant al raig Làser, del qual un científic va dir que era “*una solució a la cerca d'un problema que resoldre*”.

Les matemàtiques són una ciència que permet descriure la realitat que ens envolta. El que passa és que és una eina molt abstracta i costa veure-li la utilitat, des del pupitre d'un col·legi.

Vegem un exemple:

Sostinc una moneda a la meva mà. Què passarà si la llanço a l'aire? Allò que ens podem imaginar: que la moneda ascendirà fins a un cert punt, es pararà i començarà a caure fins que s'estampi contra el terra.

En termes d'energia, des de la meva mà i durant tot el recorregut, estarà subjecta a dues fórmules diferents:

L'Energia potencial que és l'energia que té un cos situat a una determinada altura sobre el sòl. Tindrà un valor quan es troba a la meva mà i un altre diferent, quan es pari en l'aire, per acció de la força de la gravetat. La fórmula matemàtica és la següent **Ep = m.g.h.** sent **m**, la massa, **g** la força de la gravetat i **h** l'altura de l'objecte.

Una vegada es pari en l'aire, aquí tindrà el seu pic més alt, que anirà decreixent conforme caigui cap al terra, per acció de la gravetat i de l'Energia cinètica. L'energia cinètica és una forma d'energia, coneguda com a energia de moviment. **L'energia cinètica** d'un objecte és aquella que **es produeix a causa dels seus moviments que depèn de la massa i velocitat d'aquest**. La seva fórmula matemàtica és

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

m = masa

v = velocidad

Com en la vida, en les matemàtiques les coses solen estar interconnectades (veieu "El Planeta de las Matemáticas" en aquest mateix repositori. Per això començarem donant algunes nocions d'àlgebra i fraccions, imprescindibles per a aprendre a operar amb derivades i integrals.

ESCALFANT MOTORS: UNES PETITES NOCIONS D'ÀLGEBRA, PER A SITUAR-NOS

L'àlgebra és una branca de les matemàtiques que utilitza no sols números i signes, sinó també lletres per a resoldre operacions. Es busca trobar el valor numèric de variables denominades incògnites. Aquestes es representen mitjançant lletres de l'alfabet com a x o y. (*)

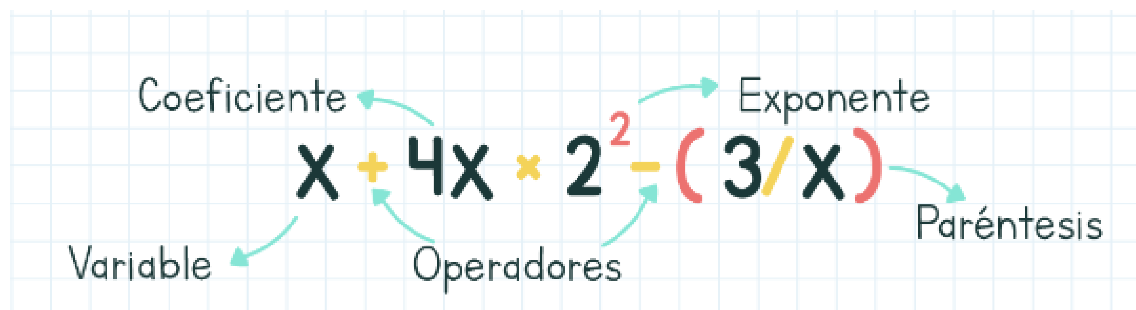
Vídeo font: https://edu.gcfglobal.org/es/algebra/expresiones-algebraicas/1/

Observa aquesta expressió: x+4x*22-(3/x)

Inclou alguns símbols que són comuns en àlgebra, però no en matemàtiques bàsiques. La forma en què s'escriuen aquestes expressions es diu **notació algebraica**.

Aquesta notació inclou cinc components principals:

a) **variables** o **incògnites**,
b) **coeficients**,
c) **operadors**,
d) **exponents** i
e) **parèntesi**.



Vegem què és cada cosa:

Variables o **incògnites**: Una variable o incògnita és una lletra que s'usa per a representar un número. Per exemple, en la següent expressió

$$X+2=5$$

la variable X representa un número desconegut que en sumar-li 2, ens donarà 5.

Expressat com una pregunta seria: a quin número pots agregar-li 2 perquè doni 5?

Escrivim X perquè, inicialment, no sabem quin serà aquest número, però el podem esbrinar. Com sabem que 2+3=5, la nostra variable ha de ser 3 o, en altres paraules, X=3. Tècnicament ho resoldríem així:

En X+2=5, passem el 2 a l'altre costat i ens queda X=5-2, amb el que obtenim com a resultat que X=3.

RECORDA: Cada vegada que desplacem un terme a l'altre costat de l'igual (=), toca canviar l'operador pel seu invers. Dit clar i català: Si estava sumant, ho passarem restant, i si estava multiplicant, ho passarem dividint, o viceversa.

Coeficients: Que són un factor multiplicador, és a dir, el número constant que es troba a l'esquerra d'una variable o incògnita i la multiplica. Per exemple, 3X = X + X + X, on 3 és **coeficient** de la variable X**.**

Operadors: Són els símbols que ens indiquen l'operació que hem de realitzar. En aquestes anotacions, farem servir els següents signes:

- Signe de Sumar +
- Signe de Restar **–**
- Signe de Multiplicació * (No usem el signe x, per a no confondre'ns amb la variable o incògnita, que la representem com a X).
- Signe de Divisió /

Exponents: Que indica quantes vegades hem de multiplicar un número per si mateix. Per exemple 2^3 està compost pel número 2, i l'exponent 3 el que significa que multipliquem 2 per si mateix, tres vegades, és a dir: 2 * 2 * 2 = 8. Si no apareix cap exponent se sobreentén que el seu valor és 1.

Parèntesi: Que s'usen per a agrupar parts d'una expressió algebraica. En un problema has de resoldre primer les expressions que estan dins d'ells i tot seguit la resta. Això significa que hi ha unes regles que has de recordar i respectar escrupolosament. **L'ordre de prioritat en la resolució** és el següent:

1. Paréntesis. (...)
2. Exponents. 3^2
3. Multiplicacions i divisions. * /
4. Sumes i restes. + -

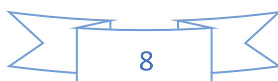
Vegem aquest exemple:

$$50 / 5*2 + (6+3*2) + 64/4^2 - 10$$

1r Parèntesi (6+3*2): Dins del Parèntesi, primer la Multiplicació 3*2 i després la Suma ---> 3*2 = 6 + 6 = 12 i després d'això ens queda:

$$50 / 5*2 + 12 + 64/4^2 - 10$$

2n Exponents 4^2-→ 4 * 4= 16 i ara ens queda:



50 / 5*2 + 12 + 64/16 – 10

3r Multiplicacions i Divisions: 5*2=10, i tenim 50/10 = 5 per un costat, i 64/16=4, per l'altre i obtenim:

50 / 10 + 12 + 4 – 10

5 + 12 + 4 – 10

4t Sumes i Restes:

5 + 12 + 4 – 10 = **11**

Font: Guillermo Westreicher, 28 de noviembre, 2020 *Álgebra*. Economipedia.com (*)

Terme algebraic

El terme algebraic és una expressió simple on es combinen lletres i números, i no se sumen o resten les variables. Per exemple:

$$-5x^3$$

Expressió algebraica

L'expressió algebraica és un conjunt de variables i números que poden combinar-se amb diferents operacions matemàtica, fins i tot sumes i restes, a diferència dels termes algebraics. Un exemple pot ser el següent:

$$-5x^3+6y$$

Les expressions poden expressar-se en funció al nombre de termes que les contenen com:

- **Monomi:** Un terme només: 15z
- **Binomi:** Poseeix dos termes: $2x^2-7y$

- **Trinomi:** Tres termes: $3x^2+8y+2z$
- **Polinomi:** Si compta amb més de tres termes: $5x^2-3y+6z-9$

Equacions algebraiques

Una equació és l'associació entre dues expressions algebraiques a través del signe d'igualtat. Poden ser principalment de dos tipus:

- **Equació de primer grau**: Quan la variable està elevada màxim a la potència 1. Se la coneix com a equació.

$$5x+5y=9$$

- **Equació de segon grau**: Quan la variable està elevada màxim a la potència 2. També se'l denomina equació quadràtica.

$$5x^2-3y+6z-9=3x$$

OPERACIONS AMB POLINOMIS. LES QUATRE REGLES.

SUMA DE POLINOMIS: 2 passos

Se'ns demana que procedim a sumar: $x^2 + x - 9$ amb $3x^2 - 2x - 6$

Pas 1: Detectar els termes equivalents i anar sumant-los entre ells.

$x^2 + 3x^2 = \mathbf{4x^2}$ X - 2x = **-x** -9 – 6= **-15**

Pas 2: Posar la solució: $\mathbf{4x^2 - x - 15.}$

RESTA DE POLINOMIS: 4 Passos. Anem a fer servir el mateix polinomi d'abans:

$x^2 + x - 9$ restar amb $3x^2 - 2x - 6$

Pas 1: Copiar el primer polinomi: $x^2 + x - 9$

Pas 2: Copiar el segon polinomi **I CANVIAR-LI ELS SIGNES**.

$3x^2 - 2x - 6$ ➡ $\mathbf{-3x^2 + 2x + 6}$

Pas 3: Operar amb els termes equivalents x^2 + x -9 **-3x^2 + 2x +6**

x^2**-3x^2** = **<u>-2x^2</u>** x**+ 2x** = **<u>3x</u>** -9 **+6** = **<u>-3</u>**

Pas 4: Posar la solució: **<u>-2x^2+3x -3</u>**

MULTIPLICACIÓ DE POLINOMIS

La multiplicació de 2 polinomis es realitza terme a terme, tenint en compte que cada terme del primer polinomi es multiplica per cadascun dels termes del segon polinomi.

Suposem la següent multiplicació de dues expressions similars a polinomis $(a-b)(x+y-z)$.

Cada terme de $(a-b)$ va a ser multiplicat per cadascu dels termes de $(x+y-z)$.

Operant amb el primer térme a

$a(x+y-z)=ax+ay-az$

Ara amb el segon térme que és $-b$

$-b(x+y-z)=-bx-by+bz$ i ajuntant tots dos resultats

$(a-b)(x+y-z)=ax+ay-az-bx-by+bz$

Exemple 1. Binomi per binomi

$(3x+2y)(5x-4y)$

Seguint el procediment anterior

$3x(5x-4y)+2y(5x-4y)$

$3x\cdot 5x-3x\cdot 4y+2y\cdot 5x-2y\cdot 4y$

$15x^2-12xy+10xy-8y^2$

Simplificant els termes semblants $-12xy+10xy=-2xy$ queda:

$15x^2-2xy-8y^2$

Ejemple 2. Binomi per trinomi

$(-2m^2n+3m)(-5m+4m^2n+6)$

De manera similar que en l'exemple 1 si prenem com a primer polinomi a $(-2m^2n+3m)$ llavors cada terme d'aquest ha de ser multiplicat un a un amb cada de $(-5m+4m^2n+6)$.

Començant amb el primer terme $-2m^2n$

$-2m^2n(-5m+4m^2n+6)$

Multiplicant terme a terme

$(-2m^2n)(-5m)+(-2m^2n)(4m^2n)+(-2m^2n)(6)$

Ordenant signes, números i variables

$-\cdot-\cdot 2\cdot 5\cdot m^2m\cdot n+\cdot-\cdot 2\cdot 4\cdot m^2m^2n\cdot n+\cdot-\cdot 2\cdot 6\cdot m^2n$

Tenint en compte que la multiplicació de signes iguals dona positiu i la multiplicació de signes diferents dona negatiu i a més en la multiplicació de potències d'igual base, es col·loca la mateixa base i se sumen els exponents, l'expressió queda:

$10m^3n-8m^4n^2-12m^2n$

Ara amb el segon terme

$3m(-5m+4m^2n+6)$

$(3m)(-5m)+(3m)(4m^2n)+(3m)(6)$

$-15m^2+12m^3n+18m$

Sumant tots dos resultats

$10m^3n-8m^4n^2-12m^2n-15m^2+12m^3n+18m$

S'observa que només hi ha un terme que es repeteix i es poden agrupar algebraicament, aquests termes són:

$10m^3n+12m^3n=\ 22m^3n$

El resultat final s'obté ordenant

$$-8m^4n^2 + 22m^3n - 12m^2n - 15m^2 + 18m$$

DIVISIÓ DE POLINOMIS

Sabem que la divisió aritmètica es compon d'un dividend, un divisor, un quocient i la resta. És la divisió que s'opera de forma més llarga realitzant restes al dividend amb el resultat de la multiplicació d'un terme del quocient pel divisor

Dividend (D)	Divisor (d)
Resta (R)	Quocient (C)

D'igual manera es pot operar en la divisió de polinomis seguint un procediment que es descriu a continuació.

1. Ordenar cada polinomi segons el grau de major a menor i si falta algun exponent intermedi completar amb zeros.
2. Buscar un número o expressió (part del quocient) que multiplicat pel divisor (polinomi de menor grau) s'aproximi a les primeres xifres o als termes de major grau del dividend (polinomi de major grau).
3. Al resultat del pas 1 se li canvia el signe i es col·loca sota el dividend segons correspongui.
4. Realitzar la suma algebraica de part del dividend amb el resultat generat en el pas 3.
5. Es baixa el següent terme o xifra del dividend al costat del resultat del pas 4.
6. Repetir el procediment des del pas 2.
7. Si no es compleix el pas 5 vol dir que no existeixen més termes en el dividend i la divisió finalitza sent el resultat:

$$\frac{D}{d} = \frac{R}{d} + Q$$

Apliquem els passos dividint 2556/12. Com és divisió de números s'omet el pas 1.

	2	5	5	6	1	2
-	2	4			2	
	0	1	5			

El pas 2 ha estat buscar un número que multiplicat per 12 s'aproximi a 25, en aquest cas el número és 2 que multiplicat per 12 dona 24.

El pas 3 ens diu que al resultat del pas 1 se li canviï el signe i es col·loqui sota el dividend en la posició adequada. En aquest cas -24 s'ha col·locat sota el 25

El pas 4 indica que es realitzi una suma algebraica, llavors procedim realitzant l'operació 25 – 24 que dona 01.

El pas 5 amerita que es baixi el següent número del dividend que és 5 i es col·loqui al costat del resultat del pas anterior, la qual cosa genera una resta inicial de 015.

El pas 6 aconsella revisar si encara existeixen termes per utilitzar en el dividend i en cas que sigui cert repetir novament tots els passos des de l'inici. El resultat aquí es presenta obtenint un valor de 213 en el quocient i resta zero, la qual cosa vol dir que la divisió és exacta.

	2	5	5	6	1	2	
-	2	4			2	1	3
	0	1	5				
	-	1	2				
		0	3	6			
		-	3	6			
			0	0			

Un exemple il·lustratiu amb la següent divisió de polinomis

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x - 5}$$

Pas 1. Tant el polinomi del numerador com el polinomi del denominador estan ordenats en funció del major exponent, no obstant això, s'observa en el numerador que falta l'acabo de grau o exponent 2 el qual es completa amb zero.

$5x^3$	$+$	$0x^2$	$-$	$3x$	$+$	1	x	$-$	5

Pas 2. En primer lloc, es busca una expressió que multiplicada per x en el quocient de com a resultat $5x^3$, aquesta expressió és $5x^2$ que en multiplicar-se per x-5 és:

$$5x^2(x - 5) = 5x^3 - 25x^2$$

$5x^3$	$+$	$0x^2$	$-$	$3x$	$+$	1	x	$-$	5
							$5x^2$		

Pas 3. El resultat del pas 2 es canvia de signe i es col·loca sota el dividend en el lloc corresponents.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 5x^3 & +\ 0x^2 & -\ 3x & +\ 1 & & x\ -\ 5 \\ \hline - & 5x^3 & +\ 25x^2 & & & & 5x^2 \end{array}$$

Pas 4. Se suma algebraicament part del dividend i la resta

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 5x^3 & +\ 0x^2 & -\ 3x & +\ 1 & x\ -\ 5 \\ - & 5x^3 & +\ 25x^2 & & & 5x^2 \\ \hline & 0 & +\ 25x^2 & & & \end{array}$$

Pas 5. Es baixa el següent acabo perquè formi part de la resta

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 5x^3 & +\ 0x^2 & -\ 3x & +\ 1 & x\ -\ 5 \\ - & 5x^3 & +\ 25x^2 & & & 5x^2 \\ \hline & 0 & +\ 25x^2 & -\ 3x & & \end{array}$$

Pas 6. Repetint els passos anteriors fins a operar amb tots els termes del dividend s'obté el següent resultat:

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 5x^3 & +\ 0x^2 & -\ 3x & +\ 1 & x\ -\ 5 \\ - & 5x^3 & +\ 25x^2 & & & 5x^2 + 25x + 122 \\ \hline & 0 & +\ 25x^2 & -\ 3x & & \\ & & -\ 25x^2 & +\ 125x & & \\ \hline & & 0 & +\ 122x & +\ 1 & \\ & & & -\ 122x & +\ 610 & \\ \hline & & & 0 & +\ 611 & \end{array}$$

Pas 7. La divisió dels polinomis es pot escriure com:

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x - 5} = \frac{611}{x - 5} + 5x^2 + 25x + 122$$

La divisió de polinomis és de gran ajuda en el càlcul d'integrals de fraccions amb polinomis sempre que el grau del numerador sigui major que el grau del denominador.

Veiem 2 exemples de divisions exactes

Exemple 1. $(2x + 3x^2 - 8) \div (x + 2)$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & 3x^2 & + & 2x & - & 8 & \,\big|\; x + 2 \\
- & 3x^2 & - & 6x & & & \;\; 3x - 4 \\
\hline
 & 0 & - & 4x & - & 8 & \\
 & & + & 4x & + & 8 & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

En aquest exemple es va ordenar el polinomi dividend d'acord amb l'exponent de major a menor.

$2x + 3x^2 - 8 = 3x^2 + 2x - 8$

Els termes triats per a la multiplicació en cada repetició dels 7 passos són:

Terme	Multiplicació	Resultat	Canvi de signe
$3x$	$3x(x+2)$	$3x^2 + 6x$	$-3x^2 - 6x$
-4	$-4(x+2)$	$-4x - 8$	$+4x + 8$

El resultat de la divisió exacta és $3x - 4$

Exemple 2. $(6x^2 - 2y^2 - xy) \div (y + 2x)$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & 6x^2 & - & xy & - & 2y^2 & \,\big|\; 2x + y \\
- & 6x^2 & - & 3xy & & & \;\; 3x - 2y \\
\hline
 & 0 & - & 4xy & - & 2y^2 & \\
 & & + & 4xy & + & 2y^2 & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

En aquest exemple tenim polinomis amb diferents variables. S'han ordenat els polinomis començant amb la variable x des del seu grau major fins al menor i després s'ha ordenat la variable y.

$6x^2 - 2y^2 - xy = 6x^2 - xy - 2y^2$

$y + 2x = 2x + y$

Els termes triats per a la multiplicació en cada repetició dels 7 passos són:

Terme	Multiplicació	Resultat	Canvi de signe
$3x$	$3x(2x+y)$	$6x^2 + 3xy$	$-6x^2 - 3xy$
$-2y$	$-2y(2x+y)$	$-4xy - 2y^2$	$+4xy + 2y^2$

Exemple 3. Divisió de polinomis amb exponents no consecutius

Un polinomi pot tenir exponents no consecutius. Per a dividir és aconsellable deixar espais en blanc o completar amb zeros en aquells termes corresponents als exponents que manca.

Sigui $1 - a - a^5 - 3a^2 \div 1 + 2a + a^2$ una divisió de polinomis on s'observa que els exponents del polinomi dividend no són consecutius, faltant els termes de grau 4 i 3. Seguint a detall els 7 passos descrits en aquesta secció la divisió és:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
-a^5 & +0a^4 & +0a^3 & -3a^2 & -a & +1 & & a^2 + 2a + 1 \\
\cline{8-8}
+a^5 & +2a^4 & +a^3 & & & & & -a^3 + 2a^2 - 3a + 1 \\
\cline{1-3}
0 & +2a^4 & +a^3 & -3a^2 & & & & \\
 & -2a^4 & -4a^3 & -2a^2 & & & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & -3a^3 & -5a^2 & -a & & & \\
 & & +3a^3 & +6a^2 & +3a & & & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & +a^2 & +2a & +1 & & \\
 & & & -a^2 & -2a & -1 & & \\
\cline{4-6}
 & & & & 0 & & &
\end{array}
$$

En resum, els termes dels polinomis s'ordenen de major a menor grau i alhora es completen amb zeros els termes que manca.

$1 - a - a^5 - 3a^2 = -a^5 + 0a^2 + 0a^3 - 3a^2 - a + 1$

$1 + 2a + a^2 = a^2 + 2a + 1$

Els termes correctes per a la multiplicació amb el divisor en cada repetició dels 7 passos són:

Terme	Multiplicació	Resultat	Canvi de signe
$-a^3$	$-a^3(a^2 + 2a + 1)$	$-a^5 - 2a^4 - a$	$a^5 + 2a^4 + a$
$2a^2$	$2a^2(a^2 + 2a + 1)$	$2a^4 + 4a^3 + 2a^2$	$-2a^4 - 4a^3 - 2a^2$
$-3a$	$-3a(a^2 + 2a + 1)$	$-3a^3 - 6a^2 - 3a$	$3a^3 + 6a^2 + 3a$
1	$a^2 + 2a + 1$	$a^2 + 2a + 1$	$-a^2 - 2a - 1$

Exemple 4. Divisió de polinomis amb termes variats

Un polinomi també pot tenir termes variats, és a dir, amb diferents combinacions de lletres. En aquest cas els polinomis han de ser ordenats per la lletra o variable de major grau fins al seu grau menor. Una vegada acabat l'ordre de la primera variable procedir d'igual manera amb les restants.

Sigui $12a^3 + 33ab^2 - 35a^2b - 10b^3 \div 4a - 5b$ una divisió de polinomis on s'observen dues variables. Com ja sabem convé sempre el primer pas que indica ordenar termes d'acord amb el grau dels exponents de major a menor.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 12a^3 & - & 35a^2b & + & 33ab^2 & - & 10b^3 & & 4a - 5b \\ \cline{10-10}
- & 12a^3 & + & 15a^2b & & & & & & 3a^2 - 5ab + 2b^2 \\ \cline{1-4}
 & 0 & - & 20a^2b & + & 33ab^2 & & & & \\
 & & + & 20a^2b & - & 25ab^2 & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & 0 & + & 8ab^2 & - & 10b^3 & & \\
 & & & & - & 8ab^2 & + & 10b^3 & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Una manera de donar el resultat de la divisió és:

$$\frac{12a^3 + 33ab^2 - 35a^2b - 10b^3}{4a - 5b} = 3a^2 - 5ab + 2b^2$$

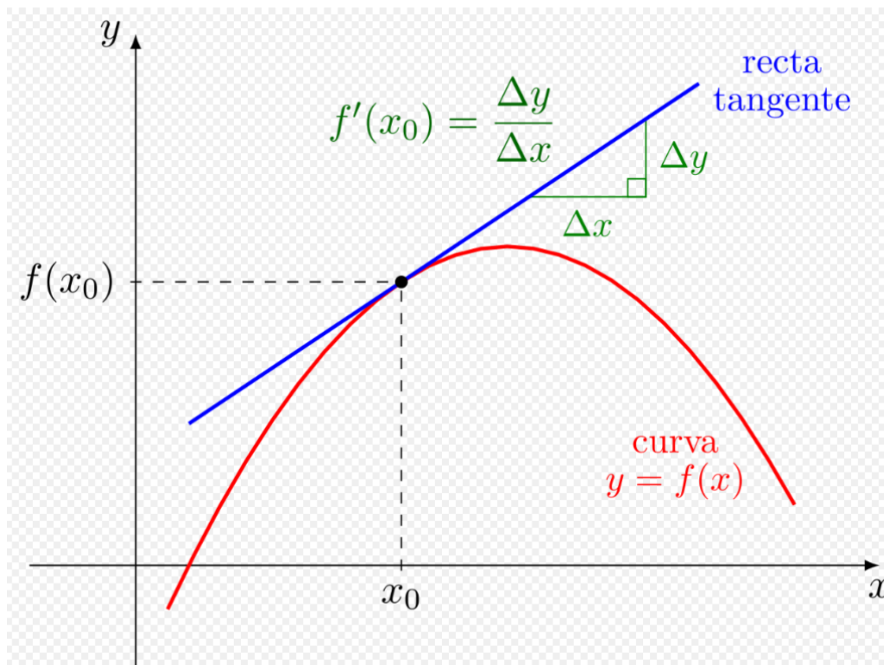
Exemple 5.

$32n^2 - 54m^2 + 12m \cdot n \div 8n - 9m$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & 54m^2 & + & 12m \cdot n & + & 32n^2 & & -9m + 8n \\ \cline{8-8}
+ & 54m^2 & - & 48m \cdot n & & & & 6m + 4n + 2b^2 \\ \cline{1-4}
 & 0 & - & 36m \cdot n & + & 32n^2 & & \\
 & & + & 36m \cdot n & - & 32n^2 & & \\ \cline{3-6}
 & & & & 0 & & &
\end{array}
$$

EL CÀLCUL DIFERENCIAL: DERIVADES SIMPLES.

Una derivada és una eina que ens descriu el ritme de canvi de qualsevol funció en un determinat punt o instant. Això serveix a una generalitat d'usos en enginyeria, arquitectura, estadística, economia, electricitat i molts altres.



Autor: Cristian Quinzacara. Representació gràfica d'una funció. La derivada de la funció en el punt marcat és equivalent al pendent de la recta tangent. Wikipedia.

Posant-nos molt puristes, tirem de definició i diem:

"El valor de la derivada d'una funció en un punt pot interpretar-se geomètricament, ja que es correspon amb el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt. La recta tangent és, al seu torn, la gràfica de la millor aproximació lineal de la funció al voltant d'aquest punt".

A veure, estic començant a posar-me fastigosament abstracte, així que donarem un exemple procedent d'una branca de la física que es diu *cinemàtica*.

Ens sortim al balcó de casa i, traient a passejar la nostra vena macarra, tirem al carrer la horterada de gerro que ens va regalar la tia Romualda, el nadal passat. Això sí, prèviament, ens assegurem de no donar-li en ple cap a cap pobre vianant.

Fins que l'odiosa peça de porcellana acabi feta miques sobre la vorera, en el seu camí cap a la perdició, el gerro no sols anirà ocupant diferents altures respecte del temps, sinó que, a més, el farà amb una velocitat creixent, és a dir que anirà caient cada vegada més ràpid. És a dir, que tenim dos elements diferents, íntimament lligats entre si, que són la velocitat i l'acceleració.

A això se'l defineix com a caiguda lliure que, en cinemàtica, és un cas particular de l'anomenat moviment rectilini uniformement accelerat.

Això el podem descriure com l'altura respecte del temps, amb la funció: y(t) sent y l'altura i t, el temps.

La velocitat v la descriurem amb la derivada $\frac{dy}{dt}$ és a dir, la derivada de l'altura respecte del temps.

$$v = \frac{dy}{dt}$$

Si volem definir **l'acceleració *a***, que és el ritme de l'increment de la velocitat a la qual canvia la velocitat del gerro respecte del temps, farem la **segona derivada** de l'altura ***y***, és a dir, tornem a derivar respecte del temps. En altres paraules, és la segona derivada de l'altura *y* respecte al temps *t* dues vegades.

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Observant l'expressió de l'acceleració, aquesta també és definida com la derivada de la velocitat respecte al temps.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

En l'exemple físic del gerro en caiguda lliure l'acceleració pren un valor constant de 9,8 m/s^2 i és coneguda com a acceleració de la gravetat.

En una derivada tenim tres parts:

1) La **variable o incògnita**, que ès una lletra que serveix per a representar un número.
2) L'**exponent,** que indica quantes vegades hem de multiplicar un número per si mateix i
3) El **coeficient**, que és un factor multiplicador, és a dir, el número constant que es troba a l'esquerra d'una variable o incògnita i la multiplica. Per exemple, 3X = X + X + X, on 3 és **coeficient** de la variable X.

En una derivada la idea és fer més petita una funció en grau. Però no ho podem fer per les braves, cal seguir unes regles per a aconseguir-ho. Comencem:

Primer Cas: La funció més bàsica de totes.

Sigui X^3 que està composta per la variable o incògnita X, i l'exponent 3 el que significa que multipliquem X per si mateixa, tres vegades, és a dir: X * X * X.

Per a baixar-li el grau, toca fer dos passos:

Pas 1: Cal passar l'exponent a la posició avançada de la X i deixar-lo multiplicant a aquesta, és a dir, que hem de passar de X^3 a **3X**.

Pas 2: El grau només pot reduir-se en una unitat, per tant, hem de respectar el grau anterior, reduït l'exponent en una unitat, és a dir, passar de X^3 a X^2.

I finalment ens queda $3x^2$.

Més exemples del mateix:

$X^8 \rightarrow 8X^7$ $X^5 \rightarrow 5X^4$ $X^3 \rightarrow 3X^2$

$X^9 \rightarrow 9X^8$ $X^6 \rightarrow 6X^5$ $X^4 \rightarrow 4X^3$

Segon cas: La funció ve acompanyada d'un número.

En aquest segon cas ens trobem que la funció ve acompanyada d'un número. Ho farem gairebé igual, en 3 passos:

Sigui $6X^5$

Pas 1: Respectant aquest número, baixarem l'exponent davant de la X

$$(5) * 6X^5$$

Pas 2: El multiplicarem pel número. (5)*6= 30X

Pas 3: Tot seguit, reduirem el grau: $30X^4$

$$6X^5 \Rightarrow 30X^4$$

Altres exemples:

$3X^4 \Rightarrow (4) *3X^4 \Rightarrow 12X^3$

$5X^7 \Rightarrow (7) *5X^7 \Rightarrow 35X^6$

Tercer cas: Quan tenim només la X, per la primera llei d'exponents, la derivada de X és igual a 1.

Comencem donant un llistat amb les vuit lleis d'exponents i els seus exemples.

De totes les taules que circulen per Internet, aquesta em sembla la millor: La columna de l'esquerra té la fórmula genèrica, mentre que a la dreta es dona un exemple pràctic de la seva aplicació.

1	$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$	$3^0 = 1$
2	$a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
5	$(a^m)^n = a^{m.n}$	$(3^2)^3 = 3^{2.3}$
6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$
7	$(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$	$(2\,x\,3)^2 = 2^2\,x\,3^2$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

Font: El Blog del profesor Alex. https://profe-alexz.blogspot.com/2012/10/teoria-de-exponentes-ejercicios.html

X ➡ $1*x^0$ ➡ $1*1 = 1$ 8X ➡ $8*x^0$ ➡ $8*1 = 8$

Quart cas: La derivada d'un número sempre és igual a 0. No importa si aquest número és 5 o 5.000.000.000.000 (5 Bilions). Se'n diu "CONSTANT", perquè mai canvia: Un 5 sempre és un 5, un 29 sempre és un 29. Se'l representa com una "c" o una "k", com ja veurem en la introducció a les Integrals.

$y = 5X^3 + 2X^2 - 5X + 10$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 5x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 5x^{1-1} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 15X^2 + 4X - 5 + 0$$

Aquí és on toca introduir un concepte anomenat Primitiva. I no, no estem parlant d'una dona que va pertànyer al grup evolutiu dels cromanyons o de la meva estimada, simpàtica i intel·ligentíssima amiga, María Primitiva Sánchez Martínez, a qui la vida va portar a viure al Principat d'Astúries i a la qual envio una afectuosa abraçada.

A risc que algun matemàtic fonamentalista em parteixi la cara, deixo de costat la definició ortodoxa[1] (que costa Déu i ajuda entendre a la primera) i passo a explicar-ho ben clar i català:

Si tenim diverses funcions que, en derivar-les, coincideixen en el mateix resultat, a aquestes funcions les direm *PRIMITIVES*[2]. I ara vegem un parell d'exemples:

La derivada $\frac{dy}{dx} = 20x^3$ te varies funcions que, en derivar-les, ens donen aquesta mateixa derivada, a les quals anomenarem primitives.

DERIVADA $f'(x)$	FUNCIONS PRIMITIVES $f(x)$
$20x^3$	$5x^4$
	$5x^4$-7
	$5x^4$+2
	$5x^4$+30

De manera que podem definir una forma genèrica d'escriure a totes aquestes múltiples funcions que, en derivar-les, ens donen la derivada $20x^3$. La forma és:

$$f(x) = 5x^4 + C$$

[1] Sigui f(x) una funció real de variable real definida en un interval tancat [a, b]⊆R. S'anomena funció primitiva de f(x) a una altra funció F(x) la derivada de la qual és f(x) en aquest interval.
[2] SPOILER: A aquest conjunt de primitives se'n diu INTEGRAL INDEFINIDA. Però ja arribarem a això .

Feta aquesta important secció, per a explicar d'on punyetes ve la constant C, tornem a les derivades.

MECÁNICA DE RESOLUCIÓ DE LES DERIVADES

Resoldrem una derivada de manera lenta, que es vegin tots els passos que toca fer per a resoldre-la:

$$y = 12X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 5X - 10$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 * 12X^4 - 4*3X^3 + 3*8X^2 - 2*2X^1 + 5*1\,(X^0) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4 + 5 - 0$$

I encara que amb aquest aspecte està correcta, per costum, quan tenim una constant (10, en aquest cas) la derivada del qual és 0, aquest 0 no es posa, amb el que el resultat final de la derivada, així en pla bonic, i amb la roba dels diumenges, seria:

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4 + 5$$

 Dubtes de principiant: Si la derivada d'un número és 0

Per què no eliminem del resultat final el 5, a més del 0? Perquè precisament per això, perquè el 5 final procedeix de derivar 5x. Aquest 5 només desapareixerà si fem la segona derivada, és a dir, si derivem la derivada que hem obtingut.

Vegem-ho:

1a Derivada o derivada que hem obtingut:

$y' = 60x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 4x + 5$

2a Derivada:

$4 * 60X^3$ – 3*12X^2+ 2*24X – 4. → $240X^3$ – 36X^2+ 48X – 4.

REFRESCANT LES OPERACIONS AMB FRACCIONS.

Com vam fer anteriorment amb les nocions d'àlgebra, cal recordar una miqueta les regles d'operació de les fraccions, abans de ficar-nos a derivar amb fraccions. Toca aclarir que la part de dalt es diu numerador I la part de baix es diu denominador.

$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$ Per exemple: $$\frac{5}{2}$$

- Suma de fraccions amb diferent denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a * d) + (b * c)}{(b * d)}$$

- Suma/Resta de fraccions amb igual denominador: Es conserva el denominador i es sumen o es resten els numeradors directament.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

- Resta de fraccions amb diferent denominador: Es multipliquen, en creu, cada numerador amb el seu denominador oposat, i es resten entre ells. El que surti s'ha de dividir pel producte de tots dos denominadors.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a*d)-(b*c)}{(b*d)}$$

- Multiplicació de fraccions: Es multipliquen entre si, els numeradors i els denominadors, cadascun pel seu costat.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{(a * c)}{(b * d)}$$

- Divisió de fraccions: Es multipliquen en creu i després es divideixen entre sí.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{(a * d)}{(b * c)}$$

Eines útils en l'aritmètica de fraccions amb derivades.

Per allò de "*fer cultureta*" que diem a Catalunya, és a dir, ampliar els coneixements, he explicat a dalt les operacions principals i més bàsiques que es fan amb fraccions.

De totes maneres, aclarir que les operacions que usarem principalment, en les derivades amb fraccions, són la suma i resta de fraccions de igual denominador y les multiplicacions, per això van destacades en aquest groc tan cridaner.

Però hi ha altres eines bàsiques que hem de conèixer i/o recordar.

Una fracció en la qual les xifres del numerador i denominador coincideixen, és sempre és igual a 1. Es diuen "fraccions iguals a la unitat".

$$\frac{a}{a}=1 \qquad \frac{4}{4}=1 \qquad \frac{36}{36}=1$$

ALERTA ESPÒILER: Si us plau, queda't amb aquesta "*història*" perquè ens vindrà de perles, quan ens fiquem amb el tema de les Derivades amb fraccions.

Et faig cinc cèntims: Com que com la segona cosa que ens demanen és reduir l'exponent en un grau, és a dir, en un 1, aquest 1 sempre el podem expressar com una fracció igual a la unitat, amb el que el pas de reduir l'exponent en un grau, el convertim en una simple resta de fraccions d'igual denominador, per la qual cosa conservarem a baix el denominador (2), mentre que a dalt, simplement, restarem el numerador (5) menys el denominador (2).

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a-b}{b} \quad \Rightarrow \quad x^{5/2} \qquad \frac{5}{2} \quad \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$$

Una solució més simple que l'electrònica d'un càntir.



https://www.65ymas.com/consejos/porque/por-que-el-botijo-es-un-sistema-perfecto-de-refrigeracion-y-esta-casi-en-desuso_5543_102.html

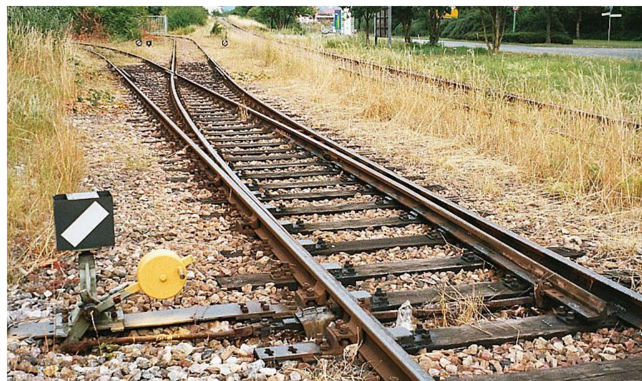
Multiplicació d'un número per una fracció.

Estigueu molt atents/as perquè aquesta eina té dues variants i totes són útils i importants. Primer comencem pel bàsic.

Tenim un número multiplicant una fracció, per exemple:

$$a * \frac{b}{c} \qquad 3 * \frac{2}{3}$$

Per a resoldre'l se'ns obren dues vies: una lenta i una altra ràpida.



No et preocupis, que t'explicaré ambdues.

Aconsello que comencis per la lenta i, quan agafis pràctica, ja prendràs la via ràpida quan calgui.

VIA LENTA: El que fem és col·locar un 1 sota el número, i procedim a multiplicar, com si tal cosa

$$\frac{a}{1} * \frac{b}{c} = \frac{a*b}{1*c} \quad \text{o sigui} \quad \frac{3}{1} * \frac{2}{5} = \frac{3*2}{1*5} = \frac{6}{5}$$

Sempre que la fracció ho permeti, hem de recórrer a la màxima simplificació i per a això tenim dues maneres de fer-ho:

Forma 1: Dividir el numerador entre el denominador. Així doncs, si dividim 6 entre 3, ens dona 2.

$$\frac{6}{3}=2$$

Forma 2: Podem trobar-nos que, si dividim el numerador entre el denominador, no ens doni un nombre enter. Però com hem de buscar el número més petit de la fracció, hem de mirar a veure si podem dividir el numerador i el denominador entre un mateix número. A aquesta acció se'n diu simplificació.

Per exemple:

Si tenim $\frac{45}{35}$ podem dividir numerador i denominador entre 5 i ens queda $\frac{9}{7}$ i ho deixem així, perquè no podem continuar simplificant-ho.

VIA RÀPIDA: Aquesta via és una autèntica "ganga", pel ràpida i senzilla que és, però té una limitació: Solament podem usar-la <u>si el número i el denominador de la fracció COINCIDEIXEN</u>.

Així doncs, el que fem és que realitzem una simplificació al bèstia, sense anestèsia ni res, perquè en coincidir el número i el denominador, entre ells "*s'anul·len*".

Tornant a l'exemple que hem usat en la Forma 1:

$3 * \frac{2}{3}$ el número i el denominador, entre ells "*s'anul·len*" i ens queda $3 * \frac{2}{3}$ amb el que el resultat final és 2.

DERIVADES AMB FRACCIONS.

Les derivades poden incorporar fraccions. Per això he invertit les cinc pàgines anteriors a explicar com s'usen.

Comencem per una Derivada amb una fracció en l'exponent:

Sigui $x^{3/4}$

- Primer, hem de passar l'exponent al coeficient.

$$\frac{3}{4}\ \text{X}$$

- Segon, cal baixar en 1 grau l'exponent:

$$\frac{3}{4} - 1$$

Però aquest 1 el podem expressar com $\frac{4}{4}$ pel que si fem la resta de fraccions d'igual denominador tenim que:

$\frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3-4}{4} = \frac{-1}{4}$ o cosa que és el mateix $-\frac{1}{4}$

Pel que finalment obtenim:

$$x^{3/4} \rightarrow \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

Més del mateix (pas a pas, com en l'exemple anterior)

$$x^{5/2} \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

La Forma àgil és una drecera mental: No oblidem que estem fent una resta de fraccions d'igual denominador, per la qual cosa conservarem a baix el denominador (2), mentre que a dalt restarem el numerador (5) menys el denominador (2).

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a-b}{b} \Rightarrow \quad x^{5/2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$$

Altre exemple:

Sigui $3\,x^{2/3}$

Primer pas: traslladem l'exponent original al coeficient i el multipliquem pel número que hi ha, que és un 3.

$$3 * \frac{2}{3}x^{?} \Rightarrow 3 * \frac{2}{3}x^{?} \Rightarrow 2\,x^{?}$$

Segon pas: reduïm l'exponent, que és $2 / 3$ respectant el denominador $\frac{2-3}{3} = - \frac{1}{3}$ i l'incorporem a la derivada en l'exponent.

El resultat final ens quedarà així.

$$2\, x^{-1/3}$$

A continuació, el Profe Don Braulio Mendoza, proposa tres exercicis amb derivades que també us deixo, però abans aconsello que mireu de resoldre'ls per vosaltres/as mateixos/as. Una vegada ho tingueu acabat, podeu contrastar-ho en les pàgines següents. Vingui animeu-vos a resoldre-ho que com en el famós acudit del candidat a una ocupació al qual li pregunten:

"Domina vostè l'anglès?" al que respon: *"Si és baixet i es deixa…"* com que aquesta derivada es deixa, anem per feina amb ella

Exercicis Proposats

1. $y = 2x^{1/3} - 5x^{4/5} + 3x^{1/2}$
2. $y = \frac{3}{2}x^{1/3} + \frac{5}{2}x^{2/3}$
3. $y = \frac{2}{5}x^{1/3} + \frac{3}{4}x^{2/5}$

Solució als exercicis

Ejercicio 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-2/3} - 4x^{-1/5} + \frac{3}{2}x^{-1/2}$$

Ejercicio 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-2/3} + \frac{5}{3}x^{-1/3}$$

Ejercicio 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{15}x^{-2/3} - \frac{3}{10}x^{-3/5}$$

Tornem a les lleis d'exponents. Recorda que les igualtats van en els dos sentits, és a dir, podem aplicar-les d'esquerra a dreta, com de dreta a esquerra:

1 $a^0 = 1 \quad a \neq 0$	$3^0 = 1$
2 $a^m\, x\, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
5 $(a^m)^n = a^{m.n}$	$(3^2)^3 = 3^{2.3}$
6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$
7 $(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$	$(2\,x\,3)^2 = 2^2\,x\,3^2$
8 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

Font: El Blog del profesor Alex. https://profe-alexz.blogspot.com/2012/10/teoria-de-exponentes-ejercicios.html

Treballarem amb les següents:

2 $a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

Si t'estàs preguntant el per què d'aquest incís, és molt senzill: No sempre et trobaràs la derivada, neta de pols i palla, preparadeta perquè la puguis derivar, com un senyor/a. Moltes vegades et trobaràs amb un autèntic "*brau" (=Toro de lídia, de gran grandària, i amb unes banyes enormes) matemàtic* d'aquest calibre:

$$\text{Sigui} \quad y = x\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5$$

I a veure com ho "*toreges*"…

Que no corri el pànic. El secret consisteix en el fet que, abans de començar a derivar, hem de sotmetre'l a una sèrie "*d'arranjaments previs*", com quan una dona es compra un vestit bonic, però el porta a la modista pel fet què li ho arregli, d'aquí i d'allà, degut a que vol que li ajusti com un guant i sigui la més bonica de la festa.

Tornant al *brau matemàtic*, el *torejarem així*:



Font: Diari ABC. El torero José Tomás brindant el toro al respectable, en la Feria de Jerez.

$$y = x\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5$$

Com ja he dit abans, el primer és "*arreglar*" la funció per a poder derivar-la i per a això ens recolzarem en les lleis d'exponents:

Pas 1: Arreglem $x\sqrt{x}$ usant

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

i ens queda:

$y = x\,(x^{1/2})$

Pas 2: Arreglem $-\frac{2}{x^2}$ usant

3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

però a l'inrevés (de dreta a esquerra) i ens queda:

$-2x^{-2}$

Nota important: Encara que la formula, en genèric, parla de $\frac{1}{a^n}$ aquest 1 no és inamovible i, de fet, toca canviar-ho per la xifra que aparegui en el numerador, tal com hem fet ja.

El + 5 no cal arreglar-lo, així que no el toquem i ens queda:

$$y= x^{1}(x^{1/2}) - 2x^{-2} +5$$

$$1+\frac{1}{2} = \frac{2}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y= x^{3/2} - 2x^{-2} +5$$ Això ja es pot derivar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2} + 4x^{-3} +0$$

$4x^{-3}$ ← $-2*-2=4$ $- 2x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2} + 4x^{-3}$$ i ja ho tenim.

Anem ara amb el "*segundo de la tarde*", que es veu d'aquesta manera:

Sigui $y= \frac{\sqrt{x^3}}{2x} + \frac{5}{\sqrt{x}} +2x\sqrt[3]{x}$

I embolica, que fa fort...

Com podeu veure, aquesta funció necessita més arranjaments que el vestit de comunió de “Tarzán”, així que ens posem a resoldre l'embolic:

Pas 1: Arreglem $\frac{\sqrt{x^3}}{2x}$ usant

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

i ens queda:

$$y = \frac{x^{3/2}}{2x}$$

Pas 2: Arreglem $\frac{5}{\sqrt{x}}$ usant

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

i ens queda:

$$\frac{5}{x^{1/2}}$$

Pas 3: Arreglem $2x\sqrt[3]{x}$ usant

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

i ens queda:

$2x(x^{1/3})$

$y = \frac{x^{3/2}}{2x} + \frac{5}{x^{1/2}} + 2x(x^{1/3})$ però això encara s'ha d'arreglar una mica més,

Pas 4: Arreglem $\frac{x^{3/2}}{2x}$ usant

4 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$

i ens queda en aquesta forma: $\frac{1}{2}x^{1/2}$ perquè $\frac{3}{2} - 1$ es el mateix que $\frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

Pas 5: Arreglem $\frac{5}{x^{1/2}}$ usant

3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

i ens quedarà com $5x^{-1/2}$

Pas 6: Finalment arreglarem la tercera part que és 2x($x^{1/3}$), per a això li aplicarem

2 $a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$

amb el que

$1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

i ens queda $2x^{4/3}$ i ja està, ja només ens queda la rematada final, perquè ara ja es pot derivar, així que anem "*entrar a matar al toro*"

$$y = \frac{1}{4}x^{1/2} + 5x^{-1/2} + 2x^{4/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{-1/2} - \frac{5}{2}x^{-3/2} + \frac{8}{3}x^{1/3} \quad \text{FINAL}$$

DERIVACIÓ D’UNA FUNCIÓ SIMPLE QUE ESTÀ DIVIDIDA PER UN NÚMERO.

En aquest cas, tenim dues vies diferents:

a) DERIVAR DIRECTAMENT TOTA LA FUNCIÓ SIMPLE (NUMERADOR) RESPECTANT EL NÚMERO DEL DENOMINADOR: EL QUE SURTI, ES DEIXA COM ESTÀ.
b) INDIVIDUALITZAR CADA TERME DE LA FUNCIÓ SIMPLE COM UNA FRACCIÓ I ANAR-LO DERIVANT: AL QUE SURTI, SE LI APLICA LA NORMA DE REDUIR LA FRACCIÓ A LA SEVA MENOR EXPRESSIÓ.

Veiem un exemple

$$f(x)=\frac{9x^4-3x^3+7x^2-2x+6}{3}$$

a) DERIVAR DIRECTAMENT TOTA LA FUNCIÓ SIMPLE (NUMERADOR) RESPECTANT EL NÚMERO DEL DENOMINADOR: EL QUE SURTI, ES DEIXA COM ESTÀ.

$$f(x)=\frac{9x^4-3x^3+7x^2-2x+6}{3}$$

$$f'(x)=\frac{36x^3-9x^2+14x-2}{3} \quad \text{FINAL}$$

a) INDIVIDUALITZAR CADA TERME DE LA FUNCIÓ SIMPLE COM UNA FRACCIÓ I ANAR-LO DERIVANT: AI QUE SURTI, SE LI APLICA LA NORMA DE REDUIR LA FRACCIÓ A LA SEVA MENOR EXPRESSIÓ.

$$f(x)=\frac{9x^4-3x^3+7x^2-2x+6}{3}$$

f'(x)= $\frac{36x^3}{3}$ - $\frac{9x^2}{3}$ + $\frac{14x}{3}$ - $\frac{2}{3}$ i en aquells en els que es pugui, els reduirem a la seva menor expressió:

f'(x)= $12x^3$- $3x^2$+ $\frac{14x}{3}$ - $\frac{2}{3}$ FINAL

DERIVACIÓ D'UNA FUNCIÓ COMPOSTA QUE ESTÀ DIVIDIDA PER UN NÚMERO.

Aquí la cosa ja es complica, ja que passem d'una funció simple, per exemple

$$\frac{3x+1}{2}$$

A una funció composta com

$$\frac{(4x+1)^2}{3}$$

I aquí la cosa canvia com de la nit al dia. Ja no podem operar directament, sinó que necessitem recórrer a una fórmula específica per a això. Aquesta fórmula és: $du^n = n^* u^{n-1} * du$

A aquesta fórmula se li diu "Regla de la Cadena" i és una de les 4 regles de derivació que veurem ara.

Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=aVNa-J8iB5I Ing E Darwin

REGLES DE DERIVACIÓ: POTENCIA, CADENA, PRODUCTE I DIVISIÓ O QUOCIENT

Derivada d'una potencia

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Sigui $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$

Llavors tenim

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^{3-1} - 1 \cdot 2x^{1-1} + 0 = 12x^2 - 2x^0$$

$$f'(x) = 12x^2 - 2$$

Regla de la cadena

$$du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot du$$

És una regla molt important. La regla de la cadena gairebé sempre funciona quan tenim un parèntesi amb una operació per fora (Exponencial, si, cosinus, logaritme, potència, ...). Dit d'una manera més fàcil és multiplicar la derivada d'això de fora per la derivada d'això d'endins.

$Sia\ f(x) = (2x-8)^4$ primer anem a fer les dues derivades per separat

$n \cdot u^{n-1} = 4 \cdot (2x-8)^{4-1} = 4 \cdot (2x-8)^3$ $va\ a\ ser\ la\ derivada\ del\ de\ fora.$

$u = 2x^1 - 0 = 2$ va a ser la derivada del de dintre, es a dir, sense l'exponent.

Un cop fetes per separat, les fiquem a la fórmula $du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot du$:

$$f'(x) = 4 \cdot (2x-8)^{4-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x-8) = 4 \cdot (2x-8)^3 \cdot 2$$

$$f'(x) = 8 \cdot (2x-8)^3$$

$$8 \cdot 2 \cdot (x-4)$$

$$f'(x) = 16(x-4)$$

Derivada d'un Producte

$$f = u \cdot v \qquad\qquad f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f(x) = (2x^3 + 5x)(-x^5 + 3x^2)$$

Aquesta funció es de la forma $f = u \cdot v$ on:

$u = 2x^3 + 5x$

$v = -x^5 + 3x^2$

Llavors les derivades de u i v son:

$u' = 6x^2 + 5$

$v' = -5x^4 + 6x$

Sabem que $f(x)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f'(x) = (6x^2 + 5)(-x^5 + 3x^2) + (2x^3 + 5x)(-5x^4 + 6x)$

Derivada d'un quocient

$$f = \frac{u}{v} \qquad\qquad f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x}{-x^5 + 3x^2}$$

Aquesta funció es de la forma $f = \frac{u}{v}$ on:

$u = 2x^3 + 5x$

$v = -x^5 + 3x^2$

Luego las derivadas de u y v son:

$$u' = 6x^2 + 5$$

$$v' = -5x^4 + 6x$$

Sabemos que $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 5)(-x^5 + 3x^2) - (2x^3 + 5x)(-5x^4 + 6x)}{(-x^5 + 3x^2)^2}$$

DERIVACIÓ D'UNA FUNCIÓ AMB ARRELS.

No us espanteu, semblen més difícils del que en realitat són. Primer recordem una mica la mecànica bàsica de l'operació amb arrels:

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Sigui y= $\sqrt{2x} + 1$ podríem fer servir la Regla de la Cadena, aplicant les fórmules d'exponents que tenim i ens sortiria:

$$Y' = (2x + 1)^{1/2}$$

$$Y' = \frac{1}{2}(2x + 1)^{-1/2} * (2)$$

$Y' = \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} * (2)$

$Y' = (2x+1)^{-1/2}$ ➡ $\frac{1}{(2x+1)^{1/2}}$ ➡

$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ FINAL

A veure, la qual cosa hem fet està intrínsecament bé, el que passa és algun matemàtic intel·ligent, li va donar al cervell sense estar-se de res i va trobar una drecera, tota bufona ella, en forma de fórmula, tal que així:

$$d\sqrt{v} = \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

Així que tornem a l'arrel de l'exemple anterior, que era

$$Y = \sqrt{2x} + 1$$

I aplicant la nova fórmula tenim que

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \text{ FINAL}$$

Com podem veure és la meitat de passos més curt i directe. Fem un altre exemple: Sigui $y = \sqrt{7x^2+2x-3}$

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{14x + 2}{2\sqrt{7x^2 + 2x} - 3}$$

Podem simplificar, dividint entre 2 i ens queda:

$$\frac{7x+1}{\sqrt{7x^2+2x}-3}$$ Final

Un altre exemple més Sigui $y= \sqrt{9x^2}$+10x-2

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{18x + 10}{2\sqrt{9x^2 + 10x} - 2}$$

Podem simplificar, dividint entre 2 i ens queda:

$$\frac{9x+5}{\sqrt{9x^2+10x}-2}$$ Final

DERIVADES DE FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES I LOGARÍTMIQUES.

Aquestes derivades excedeixen amb molt la meva intenció en aquestes senzilles anotacions.
Qui vulgui aprendre a operar amb elles, li remeto als vídeos corresponents en Youtube, tant en el canal de **El Profe**, Don Braulio Mendoza,

https://www.youtube.com/c/ElProfe1977

com en el Canal **Matemáticas Profe Alex.**

https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp

De tota manera, no considero acabat el tema sense oferirvos aquestes Taules de Derivades que complementen perfectamente aquest tema.

LA TAULA DE LES DERIVADES.

La taula de derivades és un llistat amb les derivades que més s'utilitzen i que, per tant, són importants de recordar. De manera que la taula de derivades ajuda a memoritzar totes les fórmules de les derivades.

Índex

1. Taula de derivades immediates

A continuació, pots veure la taula de derivades de les funcions més elementals. En la taula també pots veure un exemple resolt de cada tipus de derivada perquè t'ajudi a comprendre com es fa la derivada de la funció.

Només afegir que aquest tipus de derivades també es coneixen com a derivades directes.

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 5$ ➜ $f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = 7x$ ➜ $f'(x) = 7$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3$ ➜ $f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$ ➜ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[3]{x}$ ➜ $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$ ➜ $f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 4^x$ ➜ $f'(x) = 4^x \cdot \ln(4)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x)$ ➜ $f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$f(x) = \log_5(x)$ ➜ $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(5)}$
$f(x) = \text{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \text{sen}(x)$ ➜ $f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\text{sen}(x)$	$f(x) = \cos(x)$ ➜ $f'(x) = -\text{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$f(x) = \tan(x)$ ➜ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

En aquesta taula de derivades s'inclou la derivada d'una constant, la derivada d'una funció lineal, la derivada d'una potència, la derivada d'una arrel, la derivada d'una funció exponencial i la derivada d'una funció logarítmica, entre altres.

2. Taula de derivades compostes

En l'apartat anterior hem vist la taula amb les fórmules de les derivades de les funcions simples, però... com es deriva una funció composta? En la següent taula pots veure totes les fórmules de les derivades compostes.

Función	Derivada	Ejemplo		
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$f(x)=9$	➜	$f'(x)=0$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$	$f(x)=-3x$	➜	$f'(x)=-3$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$f(x)=(x^2-6)^3$	➜	$f'(x)=3(x^2-6)^2\cdot 2x$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x)=\sqrt{5x^3}$	➜	$f'(x)=\dfrac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}}$
$f(x)=\sqrt[n]{u}$	$f'(x)=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$f(x)=\sqrt[3]{7x-1}$	➜	$f'(x)=\dfrac{7}{3\sqrt[3]{(7x-1)^2}}$
$f(x)=e^u$	$f'(x)=e^u\cdot u'$	$f(x)=e^{3x}$	➜	$f'(x)=e^{3x}\cdot 3$
$f(x)=a^u$	$f'(x)=a^u\cdot\ln(a)\cdot u'$	$f(x)=4^{x^3-1}$	➜	$f'(x)=4^{x^3-1}\cdot\ln(4)\cdot 3x^2$
$f(x)=\ln(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u}$	$f(x)=\ln(9x^2+3x)$	➜	$f'(x)=\dfrac{18x+3}{9x^2+3x}$
$f(x)=\log_a(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u\cdot\ln(a)}$	$f(x)=\log_7(4x)$	➜	$f'(x)=\dfrac{4}{4x\cdot\ln(7)}$
$f(x)=\text{sen}(u)$	$f'(x)=\cos(u)\cdot u'$	$f(x)=\text{sen}(x^4)$	➜	$f'(x)=\cos(x^4)\cdot 4x^3$
$f(x)=\cos(u)$	$f'(x)=-\text{sen}(u)\cdot u'$	$f(x)=\cos(5x^2)$	➜	$f'(x)=-\text{sen}(5x^2)\cdot 10x$
$f(x)=\tan(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\cos^2(u)}=(1+\tan^2(u))\cdot u'$	$f(x)=\tan(10x)$	➜	$f'(x)=\dfrac{10}{\cos^2(10x)}$

Les derivades compostes són com les derivades immediates, però aplicant la regla de la cadena.
Com pots veure, les fórmules de les derivades compostes són com les immediates, però multiplicant després per la funció de «dins».

3. Taula de derivades trigonométriques

Com ja saps, existeixen molts tipus de funcions trigonomètriques: les raons trigonomètriques principals, les funcions hiperbòliques, les funcions trigonomètriques inverses, … Per això hem fet una taula específica amb les fórmules de les derivades trigonomètriques…

Función	Derivada	Ejemplo		
$f(x)=\text{sen}(u)$	$f'(x)=\cos(u)\cdot u'$	$f(x)=\text{sen}(x^6)$	➜	$f'(x)=\cos(x^6)\cdot 6x^5$
$f(x)=\cos(u)$	$f'(x)=-\text{sen}(u)\cdot u'$	$f(x)=\cos(6x^4)$	➜	$f'(x)=-\text{sen}(6x^4)\cdot 24x^3$
$f(x)=\tan(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\cos^2(u)}=(1+\tan^2(u))\cdot u'$	$f(x)=\tan(2x^2)$	➜	$f'(x)=\frac{4x}{\cos^2(2x^2)}$
$f(x)=\sec(u)$	$f'(x)=\frac{u'\cdot\text{sen}(u)}{\cos^2(u)}$	$f(x)=\sec(3x)$	➜	$f'(x)=\frac{3\cdot\text{sen}(3x)}{\cos^2(3x)}$
$f(x)=\text{cosec}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'\cdot\cos(u)}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x)=\text{cosec}(x^5)$	➜	$f'(x)=-\frac{5x^4\cdot\cos(x^5)}{\text{sen}^2(x^5)}$
$f(x)=\text{cotg}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x)=\text{cotg}(5x^2)$	➜	$f'(x)=-\frac{10x}{\text{sen}^2(5x^2)}$
$f(x)=\text{arcsen}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x)=\text{arcsen}(7x)$	➜	$f'(x)=\frac{7x}{\sqrt{1-(7x)^2}}$
$f(x)=\arccos(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x)=\arccos(3x)$	➜	$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$f(x)=\arctan(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{1+u^2}$	$f(x)=\arctan(6x)$	➜	$f'(x)=\frac{6}{1+(6x)^2}$
$f(x)=\text{arcsec}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$	$f(x)=\text{arcsec}(2x)$	➜	$f'(x)=\frac{2}{2x\cdot\sqrt{(2x)^2-1}}$
$f(x)=\text{arccosec}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$	$f(x)=\text{arccosec}(5x)$	➜	$f'(x)=-\frac{5}{5x\cdot\sqrt{(5x)^2-1}}$
$f(x)=\text{arccotg}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{1+u^2}$	$f(x)=\text{arccotg}(x^2-1)$	➜	$f'(x)=-\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$f(x)=\text{senh}(u)$	$f'(x)=\cosh(u)\cdot u'$	$f(x)=\text{senh}(x^3-2x)$	➜	$f'(x)=\cosh(x^3-2x)\cdot(3x-2)$
$f(x)=\cosh(u)$	$f'(x)=\text{senh}(u)\cdot u'$	$f(x)=\cosh(3x^2)$	➜	$f'(x)=\text{senh}(3x^2)\cdot 6x$
$f(x)=\tanh(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\cosh^2(u)}=(1-\tanh^2(u))\cdot u'$	$f(x)=\tanh(3x^3)$	➜	$f'(x)=\frac{9x^2}{\cosh^2(3x^3)}$
$f(x)=\text{sech}(u)$	$f'(x)=-\text{sech}(u)\cdot\tanh(u)\cdot u'$	$f(x)=\text{sech}(8x)$	➜	$f'(x)=-\text{sech}(8x)\cdot\tanh(8x)\cdot 8$
$f(x)=\text{cosech}(u)$	$f'(x)=-\text{cosech}(u)\cdot\text{cotgh}(u)\cdot u'$	$f(x)=\text{cosech}(x^2)$	➜	$f'(x)=-\text{cosech}(x^2)\cdot\text{cotgh}(x^2)\cdot 2x$
$f(x)=\text{cotgh}(u)$	$f'(x)=-\text{cosech}^2(u)$	$f(x)=\text{cotgh}(11x)$	➜	$f'(x)=-\text{cosech}^2(11x)\cdot 11$
$f(x)=\text{arcsenh}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$f(x)=\text{arcsenh}(3x)$	➜	$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{(3x)^2+1}}$
$f(x)=\text{arccosh}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$f(x)=\text{arccosh}(7x)$	➜	$f'(x)=\frac{7}{\sqrt{(7x)^2-1}}$
$f(x)=\text{arctanh}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{1-u^2}$	$f(x)=\text{arctanh}(3x-1)$	➜	$f'(x)=\frac{3}{1+(3x-1)^2}$
$f(x)=\text{arcsech}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{u\cdot\sqrt{1-u^2}}$	$f(x)=\text{arcsech}(9x^3)$	➜	$f'(x)=-\frac{27x^2}{9x^2\cdot\sqrt{1-(9x^3)^2}}$
$f(x)=\text{arccsch}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{u\cdot\sqrt{1+u^2}}$	$f(x)=\text{arccsch}(10x)$	➜	$f'(x)=-\frac{10}{10x\cdot\sqrt{1+(10x)^2}}$
$f(x)=\text{arccoth}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{1-u^2}$	$f(x)=\text{arccoth}(6x^5)$	➜	$f'(x)=\frac{30x^4}{1-(6x^5)^2}$

4. Taula d’operacions amb derivades

En aquest apartat tens la taula de derivades amb les operacions que es poden fer amb les funcions, això és, la derivada d'una suma, la derivada d'una resta, la derivada d'un producte i la derivada d'un quocient.

Operación	Derivada	Ejemplo		
$f(x)=k\cdot u$	$f'(x)=k\cdot u'$	$f(x)=7x^4$	➜	$f'(x)=7\cdot 4x^3=28x^3$
$f(x)=\frac{k}{u}$	$f'(x)=\frac{-k\cdot u'}{u^2}$	$f(x)=\frac{3}{4x}$	➜	$f'(x)=\frac{-3\cdot 4}{(4x)^2}=\frac{-12}{16x^2}$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=5x^2+4x$	➜	$f'(x)=10x+4$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$	$f(x)=x^3-6x^2$	➜	$f'(x)=3x^2-12x$
$f(x)=u+v-w$	$f'(x)=u'+v'-w'$	$f(x)=x^4+\text{sen}(2x)-e^{5x}$	➜	$f'(x)=4x^3+2\cos(2x)-5e^{5x}$
$f(x)=u\cdot v$	$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$	$f(x)=x^5\cdot\text{sen}(9x)$	➜	$f'(x)=5x^4\cdot\text{sen}(9x)+x^5\cdot 9\cos(9x)$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	$f(x)=\frac{x^2-3}{x^5}$	➜	$f'(x)=\frac{2x\cdot x^5-(x^2-3)\cdot 5x^4}{(x^5)^2}$

5. Taula de derivades completa

A mode de resum aquí tens totes les derivades hagudes i per haver.

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$f(x)=\arctan(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{1+u^2}$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$	$f(x)=\text{arcsec}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$f(x)=\text{arccosec}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x)=\text{arccotg}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{1+u^2}$
$f(x)=\sqrt[n]{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$f(x)=\text{senh}(u)$	$f'(x)=\cosh(u)\cdot u'$
$f(x)=e^u$	$f'(x)=e^u\cdot u'$	$f(x)=\cosh(u)$	$f'(x)=\text{senh}(u)\cdot u'$
$f(x)=a^u$	$f'(x)=a^u\cdot\ln(a)\cdot u'$	$f(x)=\tanh(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\cosh^2(u)}=(1-\tanh^2(u))\cdot u'$
$f(x)=\ln(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{u}$	$f(x)=\text{sech}(u)$	$f'(x)=-\text{sech}(u)\cdot\tanh(u)\cdot u'$
$f(x)=\log_a(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{u\cdot\ln(a)}$	$f(x)=\text{cosech}(u)$	$f'(x)=-\text{cosech}(u)\cdot\text{cotgh}(u)\cdot u'$
$f(x)=\text{sen}(u)$	$f'(x)=\cos(u)\cdot u'$	$f(x)=\text{cotgh}(u)$	$f'(x)=-\text{cosech}^2(u)$
$f(x)=\cos(u)$	$f'(x)=-\text{sen}(u)\cdot u'$	$f(x)=\text{arcsenh}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$f(x)=\tan(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\cos^2(u)}=(1+\tan^2(u))\cdot u'$	$f(x)=\text{arccosh}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$f(x)=\sec(u)$	$f'(x)=\frac{u'\cdot\text{sen}(u)}{\cos^2(u)}$	$f(x)=\text{arctanh}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{1-u^2}$
$f(x)=\text{cosec}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'\cdot\cos(u)}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x)=\text{arcsech}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{u\cdot\sqrt{1-u^2}}$
$f(x)=\text{cotg}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x)=\text{arccsch}(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{u\cdot\sqrt{1+u^2}}$
$f(x)=\text{arcsen}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x)=\text{arccoth}(u)$	$f'(x)=\frac{u'}{1-u^2}$
$f(x)=\arccos(u)$	$f'(x)=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$		
Operaciones con derivadas			
$f(x)=k\cdot u$	$f'(x)=k\cdot u'$	$f(x)=u+v-w$	$f'(x)=u'+v'-w'$
$f(x)=\frac{k}{u}$	$f'(x)=\frac{-k\cdot u'}{u^2}$	$f(x)=u\cdot v$	$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$		

INTRODUCCIÓ A LES INTEGRALS

Donarem una definició ortodoxa i després ja ho traduirem a un català assequible per a tots els públics:

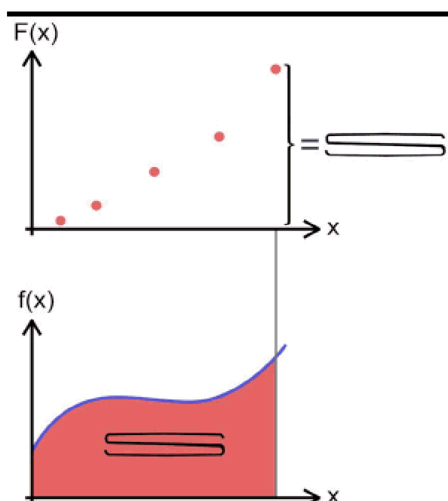
"*El càlcul integral, enquadrat en el càlcul infinitesimal, és una branca de les matemàtiques en el procés d'integració o anti derivació. És molt comú en l'enginyeria i en la ciència; s'utilitza principalment per al càlcul d'àrees i volums de regions i sòlids de revolució*".

Aquesta definició fa molta patxoca però el real és que, encara no ens hem submergit en les parts pornogràfiques del tema i, ja ens comença a sonar a Xinès Cantonès. De totes maneres, ja ens dona una primera pista quan ens parla d'anti derivació. Després tornarem a aquest punt.

De moment queda't amb la pel·lícula que derivada i integral són imatges especulars.

Una Integral, dit al brut i sense anestèsia ni res, és una eina matemàtica que ens serveix per a calcular l'àrea d'una figura geomètrica, en la qual un dels seus extrems descriu una corba.

Quelcom així: Autor: Kubrikov. Institut Conjunt d'Altes Temperatures de l'Academia de Ciències de Rusia. Agafat de Wikipedia.



Observa que en aquest dibuix apareixen dues representacions gràfiques:

La de dalt es diu F(x) i representa una sèrie de 5 punts. Per a obtenir aquests punts usem DERIVADES.

La de baix es diu f(x) i representa una figura geomètrica el costat superior de la qual és justament la unió dels 5 punts de la figura superior. La zona de color rosa és l'àrea compresa entre la línia de punts i els eixos f(x) i x. Per a calcular aquesta àrea usarem INTEGRALS.

En resum: La DERIVADA és respecte d'un punt, mentre que la INTEGRAL ho és respecte d'una àrea.

I això per a què nassos serveix?

Quan volem calcular l'àrea d'una superfície geomètrica els costats de la qual són sempre una recta, disposem d'una sèrie de senzilles formules trigonomètriques.

Tot seguit us deixo una retallada d'un PDF creat pel Govern de Canàries sobre Fórmules d'àrees i perímetres de figures geomètriques planes.

Com podeu veure, els càlculs són més simples que l'electrònica d'un càntir:

CUADRADO	RECTÁNGULO	TRIÁNGULO
a	a, b	c, a, h, b
$A = l^2$	$A = b \cdot a$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
$P = 41$	$P = 2(a+b)$	$P = a+b+c$

ROMBO	ROMBOIDE	TRAPECIO
D, d, a	c, a, b	b, c, a, d, B
$A = \frac{D \cdot d}{2}$	$A = b \cdot a$	$A = \frac{B+b}{2} \cdot a$

Font: Recursos pedagógicos en línea del Gobierno de Canarias.

El problema és que aquestes formules són inútils per a calcular l'àrea d'una figura geomètrica, en la qual un dels seus extrems descriu una corba. Posem un exemple: Imagina que som una empresa constructora i tenim dos clients que ens demanen que els construïm una piscina.

El client A ens demana la típica piscina rectangular de 5 metres de llarg per 4 d'ample i 2 metres de profunditat. La seva superfície és de 5 * 4 = 20 metres quadrats i la seva capacitat és de 5 * 4 * 2= 40 metres cúbics[3] d'aigua.

Fins aquí, tot bé.

El client B és l'amic Sergio Pelines Sarmiento Martín, aficionat de la música heavy metal rock & roll i ens demana que la piscina tingui la forma de la seva guitarra elèctrica favorita.



Autor: L'amic Sergio Pelines Sarmiento Martín, sostenint un "guitarraso" elèctric. Moltes gràcies per la teva generositat, amic.

[3] Un metre cúbic equival a 1.000 litres. Això vol dir que estem parlant de 40.000 litres de aigua

Sense les integrals, calcular l'àrea i volum d'aigua de tan extravagant piscina seria un malson impossible de realitzar. Com podeu apreciar, una guitarra elèctrica no té de recte res més que el pal. Per totes les corbes que té, les integrals són imprescindibles.

Ara reprenem la famosa anti derivació. A l'ésser com una imatge especular, la seva mecànica va a l'inrevés del que hem fet per a derivar. Posem una taula i expliquem-ho millor

Funció El exponent és **n** x^n	x^2	x^4	x^9	$3x^4$	$8x^3$	$3x^8$
Derivada: El exponent es **n-1**	2x	$4x^3$	$9x^8$	$12x^3$	$24x^2$	$24x^7$
Integral: El exponent es **n+1**	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^{10}}{10}$	$\frac{3x^5}{5}$	$\frac{8x^4}{4}$	$\frac{3x^9}{9}$
¿La Integral es pot simplificar?	NO	NO	NO	NO	SI $2x^4$	SI $\frac{x^9}{3}$

Font: Elaboració pròpia, sobre dades extretes del Canal "**El Profe**", *Introducción a las Derivadas.*

Així doncs, mentre que en la derivada baixàvem l'exponent en un 1, en la integral, l'exponent el pugem en un 1 i a

més, ho dividim tot per aquest exponente: $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Veiem un exemple tret de la taula anterior;

$$x^2 \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow \frac{x^3}{3}$$

En cas que la funció tingui un número davant, el deixem tal com està, i integrem. A tall d'exemple:

$3x^4$ amb el que la seva integral serà $\frac{3x^5}{5}$

I ara, sense anestèsia ni res, amb un parell de cxllxns, ens tirem a la piscina (No patiu, que amb el que porteu après, hi ha aigua de sobra):

$$\int (x^3 + 5x^2 + 3x + 2)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C \quad \text{Final.}$$

Com ho hem fet?:

1. Els tres primers termes de la integral $(x^3 + 5x^2 + 3x)$ no tenen cap secret. Simplement, hem aplicat $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ i ens quedem tan contents.

2. A la integral de qualsevol número només, se li agrega una x, per això en integrar, el 2 l'hem convertit en 2x. (Recorda que quan derivàvem, la derivada de 2x era igual a 2).

3. Una integral no definida[4] com aquesta, sempre s'acaba afegint una C o una K al final, que simbolitzen una CONSTANT.
   - ✓ Recorda que, quan derivàvem, la derivada d'un número en solitari era igual a 0.
   - ✓ Posem la C o la K, perquè a l'ésser una integral no definida, no tenim cap forma de determinar (=saber) quin era aquest número.

Ara farem una comparativa, com en les revistes de cotxes. A partir d'una funció, primer la derivarem i després, agafem la derivada i en farem la seva integral. Un camí d'anada i tornada:

Sigui la funció y= $4x^2$+5x-3

Al derivar-la ens queda: 2*4x +5 ➡ y'= 8x +5

I ara anem a fer la seva Integral:

$$\int (8x + 5)\, dx$$

Y' = $\frac{8x^2}{2}$ + 5x +c ➡ $4x^2 + 5x + c$

[4] Una integral definida sol produir un valor; a diferencia d'una integral indefinida, que produeix una funció

Encara que no hauria de ser un problema, a hores d'ara, posarem una fracció pel mig i vegem què passa:

$$\int (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1)\, dx$$

$$= \frac{2x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 - x + c \quad \text{Final}$$

Parlarem ara de les Integrals definides i, per a això, he recorregut a uns apunts extrets de

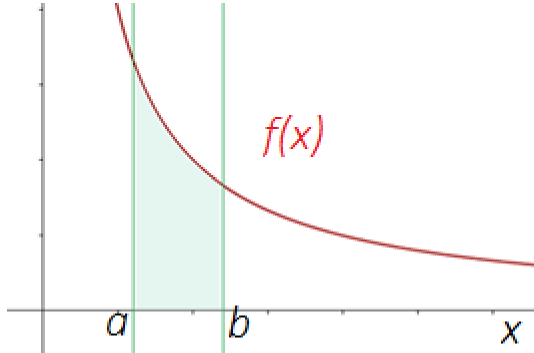
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/integral-definida.html

1. **Integral definida**
2. **Propiedats de la integral definida**
3. **Regla de Barrow**
4. **Teorema fonamental del cálcul**
5. **Teorema de la mitjana o del valor mitjà per a integrals**
6. **Funció integral.**

Ara comencem a descriure-les punt per punt:

Integral definida

Donada una funció $f(x)$ i un interval $[a, b)]$, la integral definida ès igual a l'àrea limitada entre la gráfica de $f(x)$, l'eix d'abscisses, i les rectes verticals $x = a$ i $x = b$.



Qué és cada cosa en una integral definida?

Una integral definida es composa de 5 elements:

1. La **integral definida** es representa per:

$$\int_a^b f(x)dx$$

2. ∫ és el signe d'integració.
3. ***a*** és el límit inferior de la integració.
4. ***b*** és el límit superior de la integració.
5. $f(x)$ és **l'integrant** o funció a integrar.
6. dx és el **diferencial** de x, i indica quina és la variable de la funció que s'integra.

Propietats de la integral definida

1. El valor de la **integral definida** canvia de signe si es permuten (es canvia l'ordre de) els límits d'integració .

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. Si els **límits** de la **integració coincideixen**, la integral definida val **zero**. Exemple: Si viu a Barcelona i vull viatjar a València, però no surto de la meva casa, la distància recorreguda en el viatge és zero.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. Si c es un punt interior de l'interval $[a, b]$, la **integral definida** es descompon com una suma de dues integrals esteses als intervals $[a, c]$ i $[c, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. La **integral definida** d'una suma de funcions es igual a la suma de les seves integrales·

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

5. La integral del producte d'una constant per una funció es igual a la constant per la integral de la funció.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

Regla de Barrow

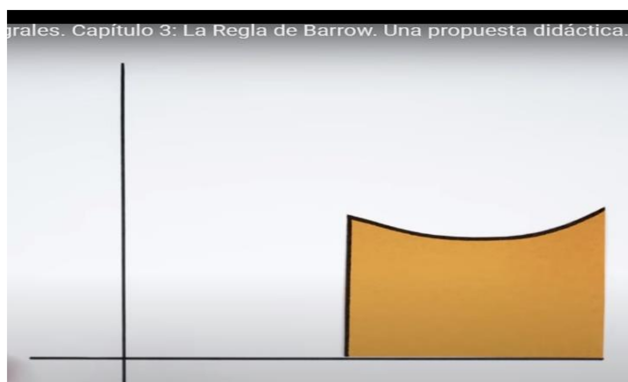
La **regla de Barrow** diu que la integral definida d'una funció continua $f(x)$ en un interval tancat $[a, b]$ és igual a la diferencia entre els valors que pren una funció primitiva $g(x)$ de $f(x)$, en els extrems del mateix interval.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

Segons el professor YouTuber Bruno Bernal, aquesta regla serveix per a calcular trossos d'Àrees. El que va voler dir en Barrow és que, si tinc una funció i vull calcular l'àrea que queda entre aquesta funció i l'eix x, hem de calcular l'àrea completa:



i després restar-li el tros que NO ens interessa, en aquest cas, el tros de l'esquerra:



Autor: Bruno Bernal. Captures de pantalla del video *Curso de Integrales. Capítulo 3: La Regla de Barrow. Una propuesta didáctica.* https://www.youtube.com/watch?v=YEensJZPE6c

Com a curiositat, en Isaac Barrow fou Mestre d'Isaac Newton i la seva Regla també es coneix com "*El Segon Teorema del Càlcul*".

Teorema fonamental del càlcul.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

El **Teorema Fonamental del Càlcul** ens indica que la derivació i la integració són operacions inverses, a més de descriure la mecànica d'operació de les integrals definides.

Per això, donada la integral definida entre a i b, de la funció $f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1. Busquem l'antiderivada $F(x)$ definida entre *a* i *b*.

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

2. Després fem la resta entre l'antiderivada $F(b)$ i l'antiderivada $F(a)$

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Exemple: Integral definida Exercici 1 JulioProfe.

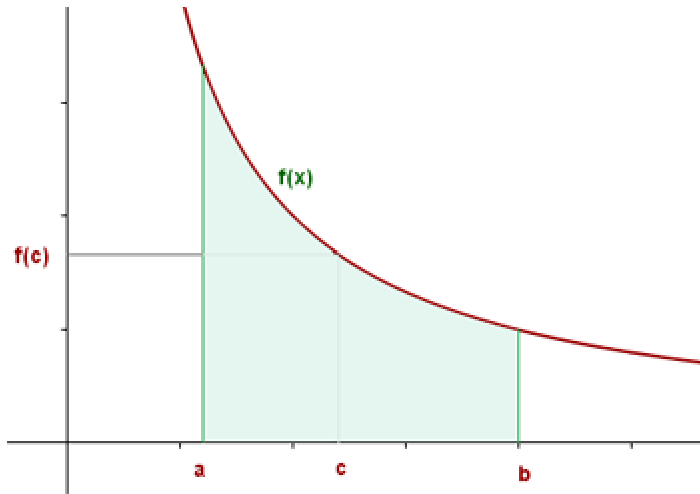
Autor: JulioProfe. Capturas de pantalla de video INTEGRAL DEFINIDA - Ejercicio 1. https://www.youtube.com/watch?v=wuI5MFhvgsY

$$\int_{-3}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=-3}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{27}{3} = \frac{35}{3}$$

Teorema de la mitjana o del valor mig per a integrals

Si una funció és continua en un interval tancat $[a,b]$, existeix un punt c a dintre de l'interval tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$$



Funció integral

Siga $f(t)$ una **funció continua** en l'interval $[a,b]$.

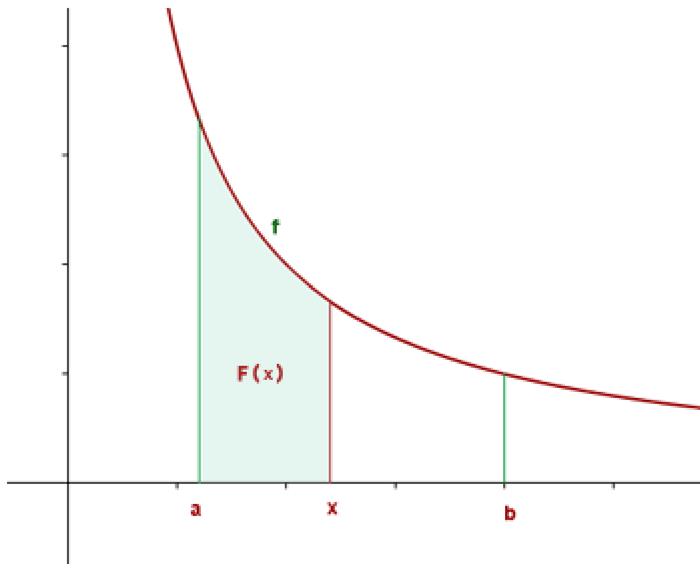
A partir d'aquesta funció es defineix la **funció integral**:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

que depen del límit superior d'integració.

Per a evitar confusions quan es fa referència a la variable de f, s'anomena t, pero si la referencia es a la variable de F, se li diu x.

Geomètricament la **funció integral**, $F(x)$, representa **l'area** del recinte limitat per la corba $y = f(t)$, l'eix d'abscisses i les rectes $t = a$ y $t = x$



A la **funció integral**, $F(x)$, també se le l'anomena **funció de àrees** de f en l'interval $[a, b]$.

A veure, tot això està molt bé, però li donarem unes explicacions clares.

El primer de tot recordar que, en una integral definida, ens passen dues coses importants:

1) Estem esbrinant com es comporta una funció entre dos punts determinats.
2) Com és una integral definida, sempre ens donarà un número, no una funció, com passa en les integrals indefinides.

Ho desenvoluparem una miqueta més:

Estem esbrinant com es comporta una funció entre dos punts determinats. El punt inferior el posem sota i el superior a dalt de la S gegant que representa el signe d'integració, tal que així:

$$\int_1^2 f(x)\, dx$$

Fet una integral definida, pas a pas.

Com ja és habitual farem una integral definida, que es vegin tots els pasos:

Sigui,

$$\int_1^2 x^2\,dx$$

Pas 1: Les operacions matemàtiques són les mateixes que en les integrals indefinides, és a dir, primer busquem l'antiderivada de la funció: L'exponent el pugem en un 1 i, a més, ho dividim tot pel mateix exponent:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ o sigui:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=2}$$

Pas 2: Ara avaluarem els límits de la integració, la qual cosa en cristià vol dir que hem de substituir la x, primer pel límit superior i després pel límit inferior. No ho dic jo, sinó el Teorema Fonamental del Càlcul. Així que substituirem la x pels límits de la integral i operem. La cosa quedarà així:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}3333$$

Conclusió final a mode de tancament

I ja hem arribat al final.

El meu estimat/ada lector/a:

Et convido que et submergeixis en YouTube i busquis a aquell professor/al fet que t'expliqui les coses de la manera que et resulti més comprensible per a tu. Et deixo un llistat d'aquells professors YouTubers que més m'han agradat i dels quals he pres part de les explicacions que apareixen en aquest treball.

A part comentar que hi ha una plèiade de professors d'Hispanoamèrica, Catalunya i Espanya que et poden fer classes particulars en línia.

Amb els meus millors desitjos de superació per a tu.

Barcelona, gener de 2024.

LLISTAT DE PROFESORS YOUTUBERS CONSULTATS PER A AQUEST ARTÍCLE

- **Bruno Bernal.** Canal de YouTube on trobaràs la teoria, explicada d'una forma molt senzilla, de temes de matemàtiques, com a Equacions, Potències, Derivades i Integrals. El seu titular és l'espanyol Bruno Bernal, llicenciat en Psicologia amb l'especialitat d'Educació, Enginyer d'Edificació i Arquitecte Tècnic. https://www.youtube.com/playlist?list=PLwkJeiatsbfZ1plQSW_guGcJzk3kKBc6u
- **Matemáticas profe Alex**. El seu titular és Alexander Gómez, Llicenciat en Matemàtiques i Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

  https://www.youtube.com/@MatematicasprofeAlex/playlists

- **El Profe.** El seu titular és Braulio Mendoza, professor de Calculo diferencial i integral, matemàtiques superiors, equacions diferencials, física moderna i probabilitat i estadística. Actualment és Coordinador Tècnic de Capacitació Manteniment en VivaAerobus, a Mèxic.

  https://www.youtube.com/@ElProfe1977/playlists

- **Julioprofe.** El seu titular és Julio Alberto Ríos Gallego (Cali, 22 de març de 1973), més conegut com Julioprofe, és un enginyer civil, professor, conferencista, tutor i youtuber colombià. https://www.youtube.com/@julioprofe

- **Profesor10demates**. El seu titular és Sergio Castro, un enginyer tècnic industrial per la Universitat de Lleó (Espanya), i que compta amb el Grau Superior d'Enginyeria Mecànica per la UNED. Professor de Matemàtiques, Física i Química des de fa 15 anys i apassionat del vibrant món de les ciències. Si busques un professor polifacètic que t'ensenyi Matemàtiques, Física i Química, t'aconsello a aquest home simpàtic i afectuós, s'ha guanyat el seu èxit en YouTube per dret propi.

  https://www.youtube.com/@profesor10demates

- **Blue Dot.** Paulo César Churata Huamaní és un físic del Perú que ensenya Matemàtiques i Física amb animacions realitzades en Python, un programa d'animacions que li dona una forma innovadora, moderna, eficaç i molt didàctica. https://www.youtube.com/@BlueDot96

- **El Traductor de Ingeniería.** Damían Pedraza és un enginyer electrònic argentí. Les seves classes són molt socràtiques, en el sentit que desitja que, qui visiti el seu canal, aprengui a pensar. El seu estil és molt personal, però molt recomanable. https://www.youtube.com/@eltraductor_ok

- **Píldoras Matemáticas.** Francisco Gil Recio és un professor madrileny que ha creat aquest canal, mitjançant l'enginyosa idea de dividir els temes en Llistes de reproducció que conté un numero variable de curts vídeos, d'uns 10 minuts o menys de durada. https://www.youtube.com/@pildorasmatematicas9582